

Эта статья не была отправлена ни в один журнал в связи с негласным запретом для сторожей публиковаться в журналах ВАК России. Подробнее – в конце статьи https://archive.org/details/20260122_20260122_1442

УДК 517.923, 517.926.4

Структура общего решения уравнений Лагерра и Уиттекера, и решение при отрицательных целых n

Зайков С.Ю.

МАУ ДО «Спортивная школа зимних видов спорта Города Томска»

zaykov_tomsk@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются дифференциальные уравнения Лагерра и Уиттекера, структура их общего решения. Структурой общего решения считается линейная комбинация четырех частных решений, содержащих дробные производные. Найдены решения этих уравнений для случаев, когда показатели вышеуказанных дробных производных являются натуральными числами, в том числе найдены решения уравнения Лагерра для отрицательных целых n . На примере уравнения Лагерра представлен парадокс многократного интегрирования, который заключается в том, что многократный интеграл одних функций можно получить многократным дифференцированием других функций.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, рекуррентные соотношения, дробные производные, уравнение Лагерра, уравнение Уиттекера, многочлены Лагерра, формула Родрига, пробелы в справочниках.

1. Введение

Классические ортогональные многочлены широко применяются в разных областях. Не только в физике и математике, но и в биологии, социологии и экономике. Одним из дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов является уравнение Лагеррра.

Многочлены Лагерра, являющиеся частным решением уравнения Лагерра при положительных целых n , хорошо изучены. Они выводятся из формулы Родрига, см. [1, с. 54], содержащую дробную производную, см. [2], порядка n . Уравнению Лагерра с положительным целым параметром n соответствует формула Родрига с дробной производной порядка n . И многочлены Лагерра порядка n , которые были выведены путем n – кратного дифференцирования этой дробной производной.

При отрицательном целом n использовать эту формулу Родрига для получения решения уравнения Лагерра можно было единственным образом, путем n – кратного интегрирования вышеуказанной дробной производной. Поскольку производная отрицательного целого порядка n является n – кратным интегралом.

Из-за сложности такого интегрирования решение уравнения Лагерра при отрицательном целом n до недавних пор не было найдено. Ситуация изменилась из-за [3]. В [3] было введено следующее понятие структуры решения.

Определение 1. Назовем структурой общего решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения линейную комбинацию таких частных решений, что они содержат в качестве сомножителей дробные производные.

Ранее дробные производные в формулах Родрига практически имели единственное применение – они позволяли вычислять точное решение уравнения при каком-то положительном целом параметре уравнения. И для дифференциальных уравнений, за исключением единственного случая, рассмотренного в этой работе, указывалась только одна формула с дробной производной.

Принципиальным отличием от прежнего подхода является то, что в [3] дробные производные в формулах Родрига рассматриваются именно как дробные производные, входящие в решение этих уравнений. В частности, из-за неоднозначности определения дробных производных, считается, что невозможно получить точные общие решения этих дифференциальных уравнений, если не найдено полное решение этих дробных производных, соответствующее этому уравнению.

Важным моментом является доказанное теоремой 1 в [3] для дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов утверждение, что дробные производные, входящие в структуру общего решения, образуют пары, в которых показатели дробных производных имеют разные знаки. Следовательно, пока одна из дробных производных дифференцируется, другая интегрируется. И наоборот.

Это утверждение справедливо не только для ортогональных многочленов. В [3] показан метод, как находить пару для известных дробных производных, входящих в структуру общего решения. Этот метод применен в этой работе для уравнения Лагерра.

Поэтому теорема 1 из [3] позволяет найти решения для решения дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов при отрицательных целых n , найдя пару для формул Родрига.

В [3] указано решение при отрицательных целых n только для уравнения Эрмита, поскольку структура общего решения уравнения Эрмита содержит только две дробных производных. Поэтому для описания структуры общего решения уравнения Эрмита было достаточно найти пару к формуле Родрига.

В [3] было указано, что в дальнейшем планируется представить структуры общего решения дифференциальных уравнений, содержащих четыре или восемь дробных производных.

В этой работе показано, что структура общего решения уравнения Лагерра содержит четыре дробных производных. В том числе, найдено решение уравнения Лагерра при отрицательных целых n .

Хотя структуру общего решения нельзя считать общим решением из-за неоднозначности дробных производных, но она позволяет рассматривать решение как единой целое, со всеми его взаимосвязями. А не как набор частных решений. Она полезна для систематизации и понимания причин появления свойств общего решения уравнения, а также для вывода новых свойств.

Рассмотрение структуры как целого предоставляет новые возможности. Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка является линейной комбинацией двух его независимых частных решений. Поэтому, в случае, когда структура содержит две пары дробных производных (т.е. четыре), то любая из них может быть представлена линейной комбинацией любых двух других. В частности, если взять две дробных производных из структуры с натуральными показателями, то две других дробных производных, являющиеся многократными интегралами, будут являться линейной комбинацией этих производных.

Следовательно, получается парадокс – многократный интеграл можно получить путем многократного дифференцирования.

В этой работе такой парадокс назван парадоксом многократного интегрирования, и приводится на примере уравнения Лагерра.

В случае, когда структура содержит четыре пары дробных производных (т.е. восемь), то появляется возможность представлять дробные производные с рациональными или иррациональными показателями как линейную комбинацию двух дробных производных с натуральными показателями, т.е. как линейную комбинацию известных функций.

В дальнейшем планируется предоставить описание структур общих решений из восьми дробных производных некоторых известных дифференциальных уравнений.

2. Структура общего решения уравнения Лагерра

Рассмотрим уравнение Лагерра

$$xy''(x) + (a + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0, \quad (1)$$

см. [1, с. 219–261], [4, с. 188–189], [5, с. 419–420], [6, с. 109–111]. Найдем структуру его общего решения в виде линейной комбинации частных решений, содержащих дробные производные, вида

$$y_k(x) = C_k f_k(x) (g_k(x, n_k))^{n_k}. \quad (2)$$

Из формулы Родрига для уравнения Лагерра получим первую часть структуры:

$$y_1(x) = C_1 x^{-a} e^x (x^{n+a} e^{-x})^{(n)}. \quad (3)$$

Из теоремы 1 в [3] получим вторую часть структуры:

$$y_2(x) = C_2 (x^{-n-a-1} e^x)^{(-n-1)}. \quad (4)$$

Покажем, что (4) является частью структуры. Функция

$$t(x) = x^{m-a} e^x, \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению

$$xt'(x) + (a - m - x)t(x) = 0, \quad (6)$$

и если продифференцировать уравнение (6) $m + 1$ раз, то получим

$$xt^{(m+2)}(x) + (a + 1 - x)t^{(m+1)}(x) - (m + 1)t^{(m)}(x) = 0, \quad (7)$$

или

$$xz_m''(x) + (a + 1 - x)z_m'(x) - (m + 1)z_m(x) = 0, \quad (8)$$

где

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = (x^{m-a} e^x)^{(m)}. \quad (9)$$

Из сравнения (1) и (8) получаем, что частным решением уравнения (1) для $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ будет

$$z_{-n-1}(x) = (x^{-n-a-1} e^x)^{(-n-1)}. \quad (10)$$

Следовательно, (4) является частью структуры.

В справочниках [7], [8] существует единственное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, у которого указано решение, сводимое к решению двух дробных переменных. Это решение не соответствует структуре решения из теоремы 1 в [3]. Рассмотрим это уравнение.

В [7, с. 163, № 68] для уравнения

$$xy''(x) + ((a+b)x + n + m)y'(x) + (abx + an + bm)y(x) = 0, \quad (11)$$

указано решение

$$y(x) = C_1 e^{-bx} (x^{-m} e^{(b-a)x})^{(n-1)} + C_2 e^{-ax} (x^{-n} e^{(a-b)x})^{(m-1)}; \\ n, m \in \mathbb{N}; a \neq b \vee n \neq m. \quad (12)$$

Тот же пример с решением указаны в [8, с. 391, № 2.118], но дополнительно указано на происхождение уравнения: что оно получено из двух уравнений,

$$xu''(x) + ((b-a)x + m + n)u'(x) + m(b-a)u(x) = 0, \quad (13)$$

имеющего частное решение

$$u(x) = (x^{-n} e^{(a-b)x})^{(m-1)}, \quad (14)$$

и

$$xu''(x) + ((a-b)x + n + m)u'(x) + n(a-b)u(x) = 0, \quad (15)$$

с частным решением

$$u(x) = (x^{-m} e^{(b-a)x})^{(n-1)}. \quad (16)$$

Сделав подстановку

$$a \Rightarrow -1, b \Rightarrow 0, n \Rightarrow -n, m \Rightarrow n + a + 1, \quad (17)$$

в уравнение (11), получим уравнение Лагерра. Следовательно, уравнение Лагерра является частным случаем уравнения (11). Сделав подстановку (17) в (12), получим две части структуры уравнения Лагерра

$$y(x) = C_1 (x^{-n-a-1} e^x)^{(-n-1)} + C_2 e^x (x^n e^{-x})^{(n+a)}. \quad (18)$$

Одна из частей структуры (18) указана выше в (4), другая

$$y_3(x) = C_3 e^x (x^n e^{-x})^{(n+a)}, \quad (19)$$

ранее не указывалась. В справочниках [7], [8] для уравнения Лагерра указано только (3), а (4) и (19) не указаны. Не указаны (4) и (19) и в других источниках, в том числе в современных статьях, например, см. [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Если бы кто-то догадался, что уравнение Лагерра является частным случаем уравнения (11), то решение уравнения Лагерра для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ могло быть найдено более пятидесяти лет назад.

Проверим, действительно ли (19) является частью структуры решения уравнения Лагерра.

Функция

$$t(x) = x^n e^{-x}, \quad (20)$$

удовлетворяет уравнению

$$xt'(x) + (x - n)t(x) = 0, \quad (21)$$

и если продифференцировать уравнение (21) $n + a + 1$ раз, то получим

$$xt^{(n+a+2)}(x) + (a + 1 + x)t^{(n+a+1)}(x) + (n + a + 1)t^{(n+a)}(x) = 0, \quad (22)$$

или

$$xz_{n+a}''(x) + (a + 1 + x)z_{n+a}'(x) + (n + a + 1)z_{n+a}(x) = 0, \quad (23)$$

где

$$z_{n+a}(x) = t^{(n+a)}(x) = (x^n e^{-x})^{(n+a)}. \quad (24)$$

Пусть

$$z_{n+a}(x) = e^{-x}y(x), \quad (25)$$

тогда из (23), (25) получим (1). Следовательно, (19) является частью структуры.

Из теоремы 1 в [3] следует, что дробные производные, входящие в структуру решения дифференциального уравнения, образуют пары, в которых первая из дробных производных дифференцируется, а вторая интегрируется, и наоборот. Поскольку (3), (4) являются такой парой, то для уравнения Лагерра должно существовать четвертое частное решение с дробной производной, образующее пару с (19). Найдем его.

По теореме 1 в [3], структура общего решения уравнения классических ортогональных многочленов включает в себя

$$y(x) = C_1 \frac{1}{h(x)} (h(x)B^n(x))^{(n)} + C_2 \left(\frac{B^{-n-1}(x)}{h(x)} \right)^{(-n-1)}. \quad (26)$$

где функция $h(x)$ соответствует уравнению Пирсона, см. [1, с. 44]:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}. \quad (27)$$

Для того, чтобы (26) соответствовала (19), представим (26) в виде

$$y(x) = C_1 f(x) \frac{1}{h(x)} (h(x)B^{n+a}(x))^{(n+a)} + C_2 f(x) \left(\frac{B^{-n-a-1}(x)}{h(x)} \right)^{(-n-a-1)}. \quad (28)$$

Из сравнения (19), (28) получим

$$e^x (x^n e^{-x})^{(n+a)} = f(x) \frac{1}{h(x)} (h(x)B^{n+a}(x))^{(n+a)}, \quad (29)$$

тогда

$$B(x) = x, h(x) = x^{-a} e^{-x}, f(x) = x^{-a}. \quad (30)$$

Из (28), (30) получим

$$y_4(x) = C_4 x^{-a} (x^{-n-1} e^x)^{(-n-a-1)}. \quad (31)$$

Проверим, действительно ли (31) является частью структуры решения уравнения Лагерра.

Функция

$$t(x) = x^{-n-1} e^x, \quad (32)$$

удовлетворяет уравнению

$$x t'(x) + (n+1-x)t(x) = 0, \quad (33)$$

и если продифференцировать уравнение (33) $m+1$ раз, то получим

$$x t^{(m+2)}(x) + (n+m+2-x)t^{(m+1)}(x) - (m+1)t^{(m)}(x) = 0, \quad (34)$$

или

$$x z_m''(x) + (n+m+2-x)z_m'(x) - (m+1)z_m = 0, \quad (35)$$

где

$$z_m(x) = t^{(m)}(x) = (x^{-n-1} e^x)^{(m)}. \quad (36)$$

Пусть

$$z_m(x) = x^a y(x), \quad (37)$$

тогда из (35), (37) получим

$$x^2 y''(x) + (n+m+2a+2-x)xy'(x) + a(n+m+1+a)y(x) - (m+a+1)xy(x) = 0. \quad (38)$$

Пусть

$$m = -n - a - 1, \quad (39)$$

тогда, подставив (39) в (38), получим (1). Следовательно, (31) является частью структуры.

Тогда, структура общего решения уравнения Лагерра:

$$y(x) = C_1 x^{-a} e^x (x^{n+a} e^{-x})^{(n)} + C_2 (x^{-n-a-1} e^x)^{(-n-1)} + C_3 e^x (x^n e^{-x})^{(n+a)} + C_4 x^{-a} (x^{-n-1} e^x)^{(-n-a-1)}. \quad (40)$$

3. Частные решения уравнения Лагерра, полученные из его дробных производных

Частные решения уравнения Лагерра можно получить из его структуры общего решения тем же способом, каким получают многочлены Лагерра: продифференцировать все дробные производные для натуральных показателей.

Это было сделано для (3), и в ряде источников, в том числе в [1], [4], [5], [6], указано, что частным решением уравнения Лагерра является функция Лагерра $L_n(x; a)$, которая при $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, является многочленами степени n , определяемыми рекуррентными соотношениями:

$$L_0(x; a) = 1, L_1(x; a) = a + 1 - x, \quad (41)$$

$$(n + 1)L_{n+1}(x; a) + (x - 2n - 1 - a)L_n(x; a) + (a + n)L_{n-1}(x; a) = 0. \quad (42)$$

а (3) представлено в виде

$$L_n(x; a) = \frac{1}{n!} x^{-a} e^x (x^{n+a} e^{-x})^{(n)}. \quad (43)$$

Из (43) по формуле Лейбница о дифференцировании произведения функций выведено

$$L_n(x; a) = \sum_{k=0}^n \binom{n+a}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (44)$$

3.1. Частные решения уравнения Лагерра при отрицательных целых n

Также, как для уравнения Эрмита, решение в элементарных функциях уравнения Лагерра для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, в теории отсутствует. Из (40) следует, что таким решением является (4). т.е.

$$z_{-n-1}(x) = (e^x x^{-n-a-1})^{(-n-1)}. \quad (45)$$

будет частным решением уравнения (1) для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$. Для удобства будем применять

$$m = -n - 1, \quad (46)$$

поскольку $m \geq 0$ при $n \in \mathbb{Z}, n < 0$.

Из (45) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a) = e^{-x} x^a z_m(x) = e^{-x} x^a (e^x x^{m-a})^{(m)}, \quad (47)$$

т.е.

$$z_m(x) = e^x x^{-a} S_m(x; a). \quad (48)$$

Из (47) получим

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = x - a + 1. \quad (49)$$

Из (26), (27) следует, что для (47)

$$h(x) = e^x x^{-a}, A(x) = x - a, B(x) = x, \quad (50)$$

тогда

$$p_1 = 1, p_0 = -a, q_2 = q_0 = 0, q_1 = 1. \quad (51)$$

Тогда по следствию 1 из теоремы 3 в [3], подставив в указанные в теореме 3 коэффициенты значения (51), получим рекуррентное соотношение

$$S_{m+2}(x; a) + (a - 2m - 3 - x)S_{m+1}(x; a) + (m + 1)(m - a + 1)S_m(x; a) = 0. \quad (52)$$

Лемма 1. Для $L_n(x; a)$ и $S_n(x)$ выполняются следующие соотношения:

$$S_n(x)(x; a) = n! L_n(-x; -a), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (53)$$

$$L_n(x; a) = \frac{1}{n!} S_n^{(L)}(-x; -a), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0. \quad (54)$$

Доказательство. Из (41), (49) следует, что (53) выполняется для $n = 0$ и $n = 1$. Покажем, что если (53) выполняется для n и $n - 1$, то оно выполняется и для $n + 1$. Возьмем уравнение (52), заменим m на $n - 1$, и сделав подстановку (53), получим

$$(n + 1)L_{n+1}(-x; -a) + (a - 2n - 1 - x)L_n(-x; -a) + (n - a)L_{n-1}(-x; -a) = 0. \quad (55)$$

Уравнение (55) совпадает с уравнением (42), но для $L_n(-x; -a)$. По методу математической индукции, (53) доказано. Из (53) получим (54).

Лемма 1 доказана.

Используя формулу Лейбница дифференцирования произведения, получим из (45), (46)

$$z_m(x) = e^x x^{-a} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \binom{m-a}{m-k} x^k, \quad (56)$$

тогда из (47), (56) получим

$$S_m(x; a) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \binom{m-a}{m-k} x^k. \quad (57)$$

Т.е. из (45), (46), (56) следует, что частным решением уравнения Лагерра при $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ будет

$$y_2(x) = e^x x^{-a} S_{-n-1}(x; a) = e^x x^{-a} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{(-n-1)!}{k!} \binom{-n-1-a}{-n-1-k} x^k. \quad (58)$$

3.2. Частные решения уравнения Лагерра при неотрицательных целых $(n + a)$

Решение в элементарных функциях уравнения Лагерра для $(n + a) \in \mathbb{Z}, (n + a) \geq 0$, в теории отсутствует. Из (40) следует, что таким решением является (19). т.е.

$$z_{n+a}(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n+a)}. \quad (59)$$

Для удобства будем применять

$$m = n + a, \quad (60)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$ при $(n + a) \in \mathbb{Z}, (n + a) \geq 0$.

Из (59) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a) = e^{-x} x^a z_m(x) = e^{-x} x^a (e^x x^{m-a})^{(m)}, \quad (61)$$

т.е.

$$z_m(x) = e^x x^{-a} S_m(x; a). \quad (62)$$

Обратим внимание на тот факт, что (61), (62) совпадают с (47), (48). Следовательно, выполняются (49), (52), (57) и справедлива лемма 1. Конечно, учитывая, что значения m в этих формулах и лемме 1 отличаются. Тогда из (57), (60), (62) следует, что частным решением уравнения Лагерра при $(n + a) \in \mathbb{Z}, (n + a) \geq 0$ будет

$$y_3(x) = e^x x^{-a} S_{n+a}(x; a) = e^x x^{-a} \sum_{k=0}^{n+a} \frac{(n+a)!}{k!} \binom{n}{n+a-k} x^k. \quad (63)$$

3.3. Частные решения уравнения Лагерра при отрицательных целых $(n + a)$

Решение в элементарных функциях уравнения Лагерра для $(n + a) \in \mathbb{Z}, (n + a) < 0$, в теории отсутствует. Из (40) следует, что таким решением является (31). т.е.

$$z_{-n-a-1}(x) = x^{-a} (x^{-n-1} e^x)^{(-n-a-1)}. \quad (64)$$

Для удобства будем применять

$$m = -n - a - 1, \quad (65)$$

поскольку $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$ при $(n + a) \in \mathbb{Z}, (n + a) < 0$.

Из (64) следует, что частью решения уравнения Лагерра для $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ являются многочлены степени m

$$S_m(x; a) = e^{-x} z_m(x) = e^{-x} x^{-a} (e^x x^{m+a})^{(m)}, \quad (66)$$

т.е.

$$z_m(x) = e^x S_m(x; a). \quad (67)$$

Сравнив (47) и (66), увидим, что они отличаются знаками при a . Следовательно, поменяв знаки у a , получим из (49), (52), (57)

$$S_0(x; a) = 1, S_1(x; a) = x + a + 1. \quad (68)$$

$$S_{m+2}(x; a) + (-a - 2m - 3 - x)S_{m+1}(x; a) + (m + 1)(m + a + 1)S_m(x; a) = 0. \quad (69)$$

$$S_m(x; a) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \binom{m+a}{m-k} x^k, \quad (70)$$

а из леммы 1 получим

$$S_n(x; a) = n! L_n(-x; a), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (71)$$

$$L_n(x; a) = \frac{1}{n!} S_n^{(L)}(-x; a), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0. \quad (72)$$

Тогда из (65), (67), (70) следует, что частным решением уравнения Лагерра при $(n + a) \in \mathbb{Z}$, $(n + a) < 0$ будет

$$y_4(x) = e^x S_{-n-a-1}(x; a) = e^x \sum_{k=0}^{-n-a-1} \frac{(-n-a-1)!}{k!} \binom{-n-1}{-n-a-1-k} x^k. \quad (73)$$

4. Структура общего решения уравнения Уиттекера и частные решения

Сделаем замену переменных для уравнения (1):

$$t(x) = x^{\frac{a+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} y(x), \quad (74)$$

получим

$$t''(x) + \frac{-\frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{2}a + n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}}{x^2} t(x) = 0. \quad (75)$$

Сделав в (75) замену переменных

$$n = k - \mu - \frac{1}{2}, a = 2\mu, \quad (76)$$

получим уравнение Уиттекера, см. [16, с.237]:

$$t''(x) + \frac{-\frac{1}{4}x^2 + kx + \frac{1}{4} - \mu^2}{x^2} t(x) = 0, \quad (77)$$

а из (74), (76) получим

$$t(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} y(x). \quad (78)$$

Сделав в (40) замены переменных (76), (78) получим структуру общего решения Уиттекера:

$$t(x) = C_1 x^{\frac{1}{2}-\mu} e^{\frac{1}{2}x} (x^{k+\mu-\frac{1}{2}} e^{-x})^{(k-\mu-\frac{1}{2})} + C_2 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{1}{2}x} (x^{-k-\mu-\frac{1}{2}} e^x)^{(-k+\mu-\frac{1}{2})} \\ + C_3 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{\frac{1}{2}x} (x^{k-\mu-\frac{1}{2}} e^{-x})^{(k+\mu-\frac{1}{2})} + C_4 x^{\frac{1}{2}-\mu} e^{-\frac{1}{2}x} (x^{-k+\mu-\frac{1}{2}} e^x)^{(-k-\mu-\frac{1}{2})}. \quad (79)$$

Тогда частные решения, получаемые из дробных производных общего решения уравнения Уиттекера при

$$k + \mu - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \vee k - \mu - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}, \quad (80)$$

получаются из соответствующих частных решений уравнения Лагерра, указанных в п. 3 этой работы, путем умножения их на $x^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}$ и замены переменных (76).

5. Парадокс многократного интегрирования на примере структуры общего решения уравнения Лагерра

Структуры общего решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, в том числе, второго порядка, приводят к парадоксу, который можно назвать

Парадокс многократного интегрирования.

Этот парадокс можно сформулировать как в вольной, или обыденной форме, так и в математически строгой. В вольной:

Иногда интегрирование можно заменить дифференцированием.

В математической строгой:

Существуют функции, многократный интеграл которых можно получить многократным дифференцированием других функций.

Рассмотрим этот парадокс на примере структуры общего решения уравнения Лагерра (1). Если мы возьмем структуру его общего решения (40), то увидим, что при целых n, a показатели всех дробных производных будут целыми числами. При этом два показателя будут положительными, т.е. две дробные производные будут многократными производными, а другие два показателя отрицательными, т.е. другие две дробные производные будут многократными интегралами.

Поскольку решение уравнения Лагерра является линейной комбинацией двух линейно независимых решений, то каждое из двух решений, содержащих многократный интеграл, будет линейной комбинацией двух решений, содержащих многократные производные.

Следовательно, чтобы найти многократные интегралы от одних функций, достаточно многократно продифференцировать другие.

Например, пусть

$$n = 5, a = -8. \quad (81)$$

Тогда структура общего решения выглядит так

$$y(x) = C_1 x^8 e^x (x^{-3} e^{-x})^{(5)} + C_2 (x^2 e^x)^{(-6)} + C_3 e^x (x^5 e^{-x})^{(-3)} + C_4 x^8 (x^{-6} e^x)^{(2)}. \quad (82)$$

Получили, что (3) и (31) дифференцируются, а (4) и (19) интегрируются. При коэффициентах (81) из (44) и (73) получаем решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{8}x^4 - x^3 - 5x^2 - 15x - 21, \quad (83)$$

$$y_4(x) = e^x(x^2 - 12x + 42). \quad (84)$$

Подставив (83) и (84) в (1) получим, что (83), (84) являются решениями уравнения Лагерра при значениях (81). Тогда из (82) получим, что

$$y_2(x) = \iiint \iiint x^2 e^x dx dx dx dx dx, \quad (85)$$

$$y_3(x) = e^x \iiint x^5 e^{-x} dx dx dx, \quad (86)$$

являются линейными комбинациями (83) и (84). Проверим, так ли это. Получим

$$(e^{-x} y_1(x))^{(3)} = \frac{1}{120} x^5 e^{-x}, \quad (87)$$

$$y_4^{(6)}(x) = x^2 e^x. \quad (88)$$

Тогда

$$y_3(x) = 120 y_1(x), \quad (89)$$

$$y_2(x) = y_4(x). \quad (90)$$

Получили, что (85), (86) линейно выражаются через (83), (84).

Необходимо учесть, что неопределенные n – кратные интегралы определяются с точностью до произвольного многочлена степени $n - 1$. Поэтому имеются ввиду такие многократные интегралы, которые соответствуют рассматриваемому уравнению. Т.е. в (85) и (86) должны быть такие интегралы, что (85), (86) являются решениями уравнения Лагерра (1) при условии (81). Это указывалось ранее, когда говорилось, что дробные производные структуры общего решения должны соответствовать уравнению.

Список литературы

- [1] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ–мат. лит., 1979. – 416 с.
- [2] Лѣтниковъ А. В. Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ. Матем. сб., 1868, том 3, номер 1, с. 1–68.
- [3] Зайков С.Ю. Структура общего решения уравнения Эрмита и решение при отрицательных целых n . https://archive.org/details/20260122_20260122_1442
- [4] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974. – 295 с.
- [5] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. – М.: Госиздат физико–математической литературы, 1962. – 464 с.
- [6] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Госиздат физико–математической литературы, 1962. – 500 с.
- [7] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИФ «Физ–мат. лит.», 2001. – 576 с.
- [8] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гл. ред. физ–мат. лит., 1971. – 576 с.
- [9] Oldham K.B., Myland J., Spanier J. An atlas of functions. New York, Springer Science+Business Media, LLC, 2009. 748p.
- [10] Wünsche A. General Hermite and Laguerre two–dimensional polynomials. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2000. Vol. 33, pp. 1603–1629.
- [11] Koekoek R. Generalizations of Laguerre polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1990. Vol. 153(2), pp. 576–590.

- [12] Gülsu M., Gürbüz B., Öztürk Y., Sezer M. Laguerre polynomial approach for solving linear delay difference equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 217(15), pp. 6765–6776.
- [13] Yuzbasi S., Yildirim G. A Laguerre approach for solving of the systems of linear differential equations and residual improvement. *Computational Methods for Differential Equations*. 2021. Vol. 9, No 2, pp. 553–576.
- [14] Aloui B., Kheriji L. Connection formulas and representations of Laguerre polynomials in terms of the action of linear differential operators. *Probl. Anal. Issues Anal*. 2019. Vol. 8(26), No 3, pp. 24–37.
- [15] Markett C. On the higher-order differential equations for the generalized Laguerre polynomials and Bessel functions. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019. Vol. 30 (5), pp. 347–361.
- [16] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. – 294 с.

The structure of the general solution of the Laguerre and Whittaker equations, and the solution for negative integer n

Zaikov S.Yu.

Municipal autonomous institution of additional education "Sports School of Winter Sports of the City of Tomsk"

zaykov_tomsk@mail.ru

Abstract. This paper considers Laguerre and Whittaker differential equations and the structure of their general solution. The structure of the general solution is a linear combination of four particular solutions that contain fractional derivatives. Solutions to these equations have been found for cases where the exponents of the aforementioned fractional derivatives are natural numbers, including solutions to Laguerre's equation for negative integer n . The paradox of multiple integration is demonstrated using the example of Laguerre's equation. This paradox lies in the fact that a multiple integral of some functions can be obtained by multiple differentiation of other functions.

Keywords: linear differential equations, Rodrigues' formula, lacunae in reference works, recurrence relations, fractional derivatives, Laguerre's equation, Whittaker's equation, Laguerre polynomials.